Généralités sur la théorie du transport optimal

Présentation de

Abdelghani OUAHAB

Laboratoire de Mathématiques (LDM)
Faculté des Sciences Exactes (FSE)
Université Djillali Liabès (UDL), Sidi Bel Abbès.

Résumé: Le problème du transport optimal a été formulé pour la première fois par Gaspard Monge en 1781, il s'intéressait à chercher une méthode optimale d'envoi d'un endroit à un autre une quantité de sable sous l'intitulé "Théorie des déblais et des remblais".

Dans les années quarante Leonid Kantorovich généralise le problème initié par Monge. L'idée de Kantorovich était de chercher la quantité de matière déplacée de chaque position (initiale) vers une autre (finale), point par point, à moindre coût.

Vers la fin des années 80 et au début des années 90, trois auteurs ont réactualisé indépendamment le problème de transport. Yann Brenier a mis un lien entre le problème de transport et celui de la mécanique des fluides incompressibles non visqueux (retrouvant ainsi l'équation d'Euler). Une approche similaire avec la mécanique des fluides a été développée par Mike Cullen en météorologie. John Mather a repris le problème dans les contextes de systèmes dynamiques et de géométrie différentielle.

Ces derniers temps, beaucoup d'auteurs s'intéressent au transport optimal sur des variétés riemanniennes et des variétés sous-riemanniennes où la fonction de coût est liée à la distance sous-jacente.

Mots clés: Application transport, Transport optimal, fonction de coût, espace de probabilisé, convergence étroite, mesure tendue, point critique.

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures.* Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Basel: Birkhäuser, 2005.

[2] Z. Badreddine, Mass transportation on sub-Riemannian structures of rank two in dimension four. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **36**, (2019), 837-860.

[3] M. Belabbas, J. Henderson, A. Ouahab and F. Souna, Existence and transportation inequalities for fractional stochastic differential equations, Submitted.

[4] W. Gangbo and R.J. McCann, The geometry of optimal transportation. *Acta Math.* **177**, No. 2, (1996), 113-161.

[5] A. Fathi and A. Figalli, Optimal transportation on non-compact manifolds. *Isr. J. Math.* **175**, (2010), 1-59.

[6] A. Figalli and L. Rifford, Mass transportation on sub-Riemannian manifolds. *Geom. Funct. Anal.* **20**, (2010), 124-159.

[7] M. Ledoux. *The Concentration of Measure Phenomenon.* Mathematical Surveys and Monographs **89**. American Mathematical Society, Providence RI, 2001.

[8] F. Santambrogio, *Optimal Transport for Applied Mathematicians. Calculus of Variations, PDEs, and Modeling.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 87. Cham: Birkhüser/Springer (2015).

[9] C. Villani. *Optimal Transport: Old and New.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 338. Springer, Berlin, (2009).

[10] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation* Graduate Studies in Mathematics 58. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2003.